Maximal IS

הגדרות יהי $G=(V,E)$

- $A\subseteq V$ נקרא **maximal-IS**
  אם A ב"ת
  ולכל $A\subsetneq B$, יש קשת $(v,w)=e\in E$ כך ש $v,w\in B$.

- $A\subseteq V$ נקרא **maximum-IS**
  אם A ב"ת
  ולכל B ב"ת $|B|\le|A|$.

הערה: maximum-IS קשה למצוא
אך Maximal-IS $\in P$, כמובן. ניתן לבנות בקלות באופן חמדני.
האלגוריתם הנ"ל מאוד סדרתי. השאלה אפשר לבצע במקביל?

משפט: maximal-IS $\in RNC$

הוכחה:

נתאר אלג'-ם:
קלט: $G=(V,E)$ לא-מכוון.
התחלה $I=\emptyset$
לולאה עד ש (T ריק או $E=\emptyset$)
{ (1) לכל $v\in V$
- אם $d(v)=0$ v מועמד
- אם $d(v)\geq 1$, בחר את v להיות מועמד בהסת' $\frac{1}{2d(v)}$

③ לכל $(u,v)\in E$

אם גם u וגם v מועמדים

ו $d(u) \le d(v)$, מחק u מרשימת המועמדים

(שוויון שוברים בצורה ארביטררית).

④ לכל $v\in V$, אם v מועמד ששרד $I=I\cup\{v\}$

הורד את $\boxed{v\cup\Gamma(v)}$ מרשימת הקודקודים

הורד כל קשת שנוגעת ב $v\cup\Gamma(v)$ מרשימת הקשתות.

עדכן את הדרגות בהתאם.

נניח בשלב הראשון ש $T=\infty$

1. הוכח שבכל שלב I קבוצה בת"ל בגרף המקורי

[אם $v\in I$ בשלב ה t

אז: 1. v אין שכן לו קודקודים שנבחרו בשלבים $1,\dots,t-1$, כי כל קודקוד שהוסף ל I, הורדנו את כל שכניו.

2. בשלב ② v אין שכן לו קודקוד שנבחר בשלב

③ כמו 1, v אין שכן לו קודקודים שנבחרים ב $t+1,\dots,T$.

③ בסוף I קבוצה ב"ת מקסימלית

[כי קודקוד שמוציאים שכן ל $v\in I$

ולכן לא יכול להרחיב את I

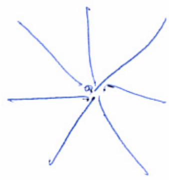
בסוף הרצנו על כל הקודקודים]

נשארה השאלה: - מהי תוחלת גודל הקבוצה

לא שהאלגוריתם תמיד (כמו פה)

- אחרת T לוקח כך שהאלגוריתם יעצור

בהס' $\geq \frac{1}{2}$ תוך T צעדים.



דוגמא:

גם - d רגולרי.

נראה קבוצה $Good \subseteq V$ כך ש:

1. $Pr_{e=(v,w)\in E}(v\in Good \vee w\in Good) \geq \frac{1}{2}$

2. לכל $v\in Good$ $\quad pr(v\in\Gamma(I)) \geq \underbrace{c}_{\text{קבוע}}$

ביחד:

$$E\left(\begin{array}{c}\text{מס' צלעות}\\ \text{שנמחקו}\\ \text{בסיבוב}\end{array}\right) \geq \sum_{(v,w)\in E} Pr\left[(v\in\Gamma(I)) \cup (w\in\Gamma(I))\right]$$

$$\geq \sum_{\substack{(v,w)\in E\\ v\in Good \text{ או } w\in Good}} Pr(v\in\Gamma(I) \vee w\in\Gamma(I))$$

$$\geq \frac{|E|}{2}\cdot c = \frac{c}{2}|E|$$

לכן צריך מס' הסיבובים עד שנגיע לקבוצה ריקה $O(\log|E|)$.

טענה: יש קבוע c_2 כך שההסתברות שהאלג' ייקח $c_2\log|E|$ סיבובים $\geq \frac{1}{n}$

הוכחה: נסמן X_i - מאורע שבסיבוב ה-i $\quad \underbrace{|E_i|}_{\text{קשתות שנשארו בסיבוב } i} \leq \left(1-\frac{c}{4}\right)|E|_{i-1}$

$$pr(X_i) \geq \frac{c}{4}$$

אחרת:

$$E\left(\begin{array}{c}\text{מס' צלעות}\\ \text{שנמחקו}\\ \text{בסיבוב ה-i}\end{array}\right) \leq \underbrace{pr(X_i=1)}_{\text{נמחקו לכל היותר } \frac{c}{4}|E|}\cdot \underbrace{|E|}_{\text{לכל היותר נמחק}} + pr(X_i=0)\cdot \underbrace{\frac{c}{4}|E|}_{\text{נמחקו } \frac{c}{4}|E|}$$

$$< \frac{c}{4}|E| + \frac{c}{4}|E| = \frac{c}{2}|E|$$ סתירה ☐

נניח כעת T סיבובים.

$X_1, \dots, X_T$ אז: $E(X_i) \geq \frac{c}{4}$

$$\Pr\left(\sum X_i \leq \frac{c}{8}T\right) \leq \Pr\left(\left|\sum X_i - \mu\right| \geq \frac{\mu}{2}\right) \leq e^{-\Omega(\mu)} = e^{-\Omega(T)}$$

ועבור $T = \Theta(\log n)$ גדול מספיק, סיכויי קטן.

ולכן חוץ מהסתברות הנ״ל, מספר הפעמים ירדנו בפקטור $\frac{c}{4}$

ולכן הגענו ל $E_T = \emptyset$.

קובעים סדר על הקודקודים לפי דרגה, ושוויון נשבר שרירותית.

הגדרה: קודקוד הוא רע אם יותר מ־$\frac{2}{3}$ משכניו בדרגה גבוהה ממנו.

לקודקוד רע סיכוי רע לשרוד, אלא אם הוא נבחר.

הגדרה: צלע $e=(w,v)$ היא רעה, אם שני קודקודיה רעים.

טענה 1:

$$\Pr_{e\in E}\left[e \text{ רעה}\right] \le \frac{1}{2}$$

טענה 2: לכל קודקוד v טוב

$$\Pr\left(\exists w\in\Gamma(v) \quad w \text{ מועמד}\right) \ge 1-e^{-1/6}$$

טענה 3: לכל קודקוד w

$$\Pr\left(w \text{ שרד} \;\middle|\; w \text{ נבחר}\right) \ge \frac{1}{2}$$

ולכן מ־2,3: לכל v טוב,
$$\Pr(v\in\Gamma(I)) \ge \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-1/6}\right)}_{\text{נסמן } c}$$

c קבוע, $c>0$.

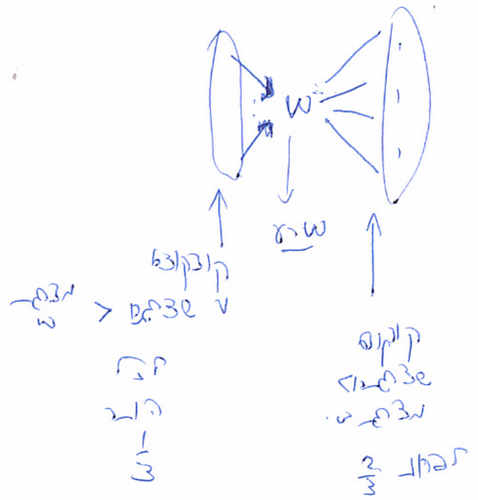
הוכחת טענה 1

– נסתכל על הגרף, אז יש קשת בין 2 קודקודים אם"ם
קשת מכוונת ($d(u)<d(v)$) או $d(u)=d(v)$ ומסדרים באופן רנדומלי את הקשת u ← v)

– לכל 2 קודקודים u,v יש קשת אחת בלבד מבין שניהם ו...

נגדיר העתקה $f:$ (קשתות רעות) $\rightarrow \binom{E}{2}$

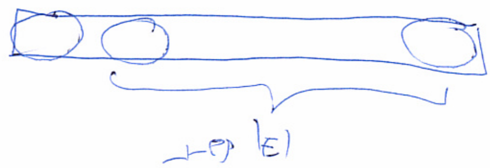
עבור:



לכל קשת רעה:
(v, w)
$v \rightarrow w$

ולכן לכל קשת רעה (w,v) כנ"ל
ניתן להתאים 2 קשתות זרות

מתקיים: ההעתקה f כזו כך שלכל $e_1 \neq e_2$ רעות
$\underbrace{f(e_1)}_{\text{2 קשתות}} \cap f(e_2)=\emptyset$



ולכן $|BadEdges| \leq \frac{|E|}{2}$. □

<u>הוכחת טענה 2</u>: לכל v טוב,

$$\Pr\left[\exists w\in\Gamma(v)\left[\overset{w}{\text{מסומן}}\right]\right] \ge 1-e^{-1/6}$$

$$\Pr\left(\neg\exists_{w\in\Gamma(v)}\left(w \text{ מסומן}\right)\right) = \Pr\left(\bigcap_{w\in\Gamma(v)} \neg \underbrace{C_w}_{\downarrow \ w \text{ לא נבחר}}\right) \le \underset{\downarrow}{\prod_{w\in\Gamma(v)}} \Pr\left(\begin{matrix} w \text{ לא} \\ \text{מסומן}\end{matrix}\right) = \prod_{w\in\Gamma(v)}\left(1-\frac{1}{2d(w)}\right)$$

ב"ת
משלים

$$= \prod_{\substack{w\in\Gamma(v)\\ d(w)\le d(v)}}\left(1-\frac{1}{2d(w)}\right) \le \prod_{\substack{w\in\Gamma(v)\\ d(w)\le d(v)}}\left(1-\frac{1}{2d(v)}\right) \underset{\substack{\downarrow\\ v \text{ טוב}}}{\le} \left(1-\frac{1}{2d(v)}\right)^{d(v)/3} \le e^{-1/6}$$

$\square$

<u>הוכחת טענה 3</u>: לכל w,

$$\Pr\left(\overset{w}{\text{שורד}} \,\middle|\, \overset{w}{\text{נבחר}}\right) \ge \frac{1}{2}$$

נניח שנבחר w

$$\Pr\left(\begin{matrix} w \text{ לא}\\ \text{שורד}\end{matrix} \,\middle|\, \overset{w}{\text{נבחר}}\right) = \Pr\left(\exists_{\substack{z\in\Gamma(w)\\ d(z)> d(w)}} \overset{z}{\text{נבחר}} \,\middle|\, \overset{w}{\text{נבחר}}\right)$$

$$\le \sum_{\substack{z\in\Gamma(w)\\ d(z)>d(w)}} \underbrace{\Pr\left(\overset{z}{\text{נבחר}} \,\middle|\, \overset{w}{\text{נבחר}}\right)}_{=\frac{1}{2d(z)}} \le \sum_{\substack{z\in\Gamma(w)\\ d(z)>d(w)}} \frac{1}{2d(w)} \le \frac{d(w)}{2d(w)} = \frac{1}{2}$$

$\square$

אלפה השתמשנו [illegible] אי-תלות זוגית

למה 1: אם $X_1, \dots, X_n$ משתני $\{0,1\}$ ב"ת: $pr(X_i)=p_i$

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = 1 - pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \neg X_i\right) \underset{\text{אי-תלות}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} pr(\neg X_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

למה 2: אם $X_1, \dots, X_n$ משתני $\{0,1\}$ ב"ת זוגית $pr(X_i)=p_i$

אז

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{2}\right)$$

הוכחה: נסדר $p_1 \geq \dots \geq p_n$ ו-k המינימלי ש $\sum_{i=1}^{k} p_i \geq 1$, או $k=n$ אם $\sum_{i=1}^{n} p_i < 1$.

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) \geq pr\left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} pr(X_i) - \sum_{1\le i<j\le k} pr(X_i \cap X_j)$$

$$\underset{\text{אי-תלות זוגית}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} p_i}_{\alpha \text{ נסמן ב}} - \sum_{1 \le i<j\le k} p_i \cdot p_j$$

$\sum_{i<j} p_i p_j$ מקסימלי תחת האילוץ $\sum_{i=1}^{k} p_i = \alpha$

כאשר ה p_i שווים $p_i = \frac{\alpha}{k}$ $\quad \sum_{i<j} p_i p_j \leq \binom{k}{2}\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2$

$$\geq \alpha - \frac{k(k-1)}{2} \frac{\alpha^2}{k^2} = \alpha\left(1 - \frac{k-1}{2k}\alpha\right)$$

אם $k=n$, $\alpha \leq 1$

$$\alpha\left(1 - \frac{k-1}{2k}\alpha\right) \geq \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{2}$$

אם $k<n$, $\alpha \geq 1$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} p_i \leq 1 + p_k \leq 1 + \frac{1}{k-1} = \frac{k}{k-1}$$

$$\alpha\left(1 - \frac{k-1}{2k}\alpha\right) \geq \alpha \cdot \left(1 - \frac{\cancel{k-1}}{2\cancel{k}} \frac{\cancel{k}}{\cancel{k-1}}\right) = \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}$$

טענה ב׳ הוכחה של איתור תוגב

לכן v זוגי,

$$\Pr\left(\exists_{w\in\Gamma(v)}\ w \text{ מוחק}\right)$$

$$\geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\sum_{w\in\Gamma(v)} \Pr(w \text{ מוחק})}{2}\right) \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{w\in\Gamma(v)} \Pr(w \text{ מוחק}) = \frac{1}{2}\sum_{w\in\Gamma(v)} \frac{1}{2d(w)} \geq \frac{1}{2}\sum_{\substack{w\in\Gamma(v)\\ d(w)\leq d(v)}} \frac{1}{2d(w)} \geq \frac{1}{2}\sum_{\substack{w\in\Gamma(v)\\ d(w)\leq d(v)}} \frac{1}{d(v)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ v \text{ זוגי}}}{\geq} \frac{1}{2}\,\frac{d(v)}{3}\,\frac{1}{d(v)} = \frac{1}{6}.$$

רק הקבוע השתנה

והשאר נשאר אותו דבר.