1. A theorem on partially ordered sets (Hebrew); Riveon Lematematika, vol. 7 (1953), pp. 26-29.

A THEOREM ON PARTIALLY ORDERED SETS (Summary)

Michael Rabin

In the following note we give a condition for the finiteness of a partially ordered set. This theorem was established in order to prove the finiteness of certain classes of ideals.

Theorem.

Assumption: Let the partially ordered set M satisfy the following conditions:

a) The maximum condition (that is, the ascending chain condition).

b) The minimum condition (that is, the descending chain condition).

c) Every subset of M in which all pairs of elements are uncomperable, is finite.

Conclusion: M is finite.

The crucial point of the proof lies in the following general principle.

Principle:

Let $S_1, S_2, \ldots$ be an infinite sequence of finite and non-void sets. Let P be a property which is meaningful for all finite sequences (a_i), $i=1,\ldots,n$, where a_i is an element of S_i. Let P be such that if (a_i), $i=1,\ldots,n$ has the property P then every initial of this sequence satisfies P.

If there exists, for every n, a sequence containing n terms and having the property P, then there exists an infinite sequence (a_i), $i=1, 2, \ldots$ every initial of which satisfies P.

For proving this principle we apply Cantor's diagonal method.

Hebrew University, Jerusalem

משפט על קבוצות סדורות באופן חלקי

מיכאל רבין

מבוא.

בשורות הבאות ננסח ונוכיח מבחן המבטיח את סופיותה של קבוצה סדורה באופן חלקי (partially ordered). מבחן זה התגלה אגב מחקר בתורת החוגים הקומוטטיביים ושמש שם להוכחת סופיותן של מחלקות מסוימות של אידיאלים.

§ 1. הגדרת הקבוצה הסדורה באופן חלקי.

קבוצה תקרא ס ד ו ר ה ב א ו פ ן ח ל ק י אם מגדר בין אבריה יחס בעל שני מקומות ריקים, שנסמנו על-ידי $\prec$ (למשל: $y \prec x$) ונקרא לו י ח ס ה ע ק י ב ה (x עוקב ל- y). שלילתו של יחס העקיבה תסומן על-ידי $\nprec$ ($y \nprec x$). מיחס העקיבה נדרוש את התכונות הבאות:

א) אי-רפלכסיביות: $x \nprec x$.

ב) אסימטריות: $y \prec x$ גורר $x \nprec y$.

ג) טרנסיטיביות: $y \prec x$ ו- $z \prec y$ גוררים $z \prec x$.

נאמר כי הקבוצה סדורה באופן חלקי על-ידי יחס העקיבה $\prec$. אנו מרשים את האפשרות שעבור זוג אברים שונים x ו- y יהיה קים גם $y \nprec x$ וגם $x \nprec y$; על זוג אברים כאלה נאמר שאינם נתנים להשואה. בגלל עובדה זו נקראת הקבוצה סדורה באופן ח ל ק י . להלן נכתב את היחס $y \prec x$ גם בצורה $x \succ y$ ונאמר גם: y קודם ל- x.

ד ו ג מ ה .
את קבוצת כל הקבוצות החלקיות של קבוצה נתונה נוכל להפוך לקבוצה סדורה באופן חלקי, אם בתור יחס העקיבה נקח את ההכלה (זאת-אומרת: x עוקב ל- y פרושו x מכיל את y).

§ 2. אברים מכסימליים ומינימליים, תנאי המכסימום והמינימום.

ה ג ד ר ה 1 .
תהי A קבוצה חלקית של קבוצה סדורה באופן חלקי. האבר a של A יקרא מכסימלי ב- A אם אין ב- A אבר x המקים $a \prec x$.

ה ג ד ר ה 2 .
האבר a של A יקרא מינימלי ב- A אם אין ב- A אבר y המקים $y \prec a$.

ה ג ד ר ה 3 .
נאמר שהקבוצה M מקימת את תנאי הסדרה העולה, אם אין בה סדרה אין-סופית (a_n), $n=1,2,\dots$ שעבורה $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n \prec \dots$.

לא קשה להוכיח שהתנאי הקודם אקויולנטי לתנאי הבא: בכל קבוצה חלקית לא-ריקה של M ישנם אברים מכסימליים. תנאי זה נקרא ת נ א י ה מ כ ס י מ ו ם.

ה ג ד ר ה 4.

נאמר ש- M ממלאת את תנאי הסדרה היורדת, אם אין בה סדרה אין-סופית (a_n), $n=1,2,\dots$ שבה: $\dots < a_n < \dots < a_2 < a_1$. באופן דומה לקודם נקבל שתנאי זה את תנאי המינימום.

§ 3. נסוח המשפט והוכחתו.

משפט.

ה נ ח ה. M קבוצה סדורה באופן חלקי, הממלאת את התנאים הבאים: (א) תנאי המכסימום. (ב) תנאי המינימום. (ג) כל קבוצה חלקית של M שכל שנים מאבריה אינם נתנים להשואה היא סופית.

מ ס ק נ ה. M היא קבוצה סופית.

מ ש פ ט - ע ז ר א.

אם M מקימת את (ג) ו- B קבוצה חלקית של M, אז קבוצת האברים המינימליים ב- B היא סופית.

ה ו כ ח ה.

תהי S קבוצת האברים המינימליים ב- B. אם x ו- y הם אברי S, אזי אין הם נתנים להשואה, כי $x<y$ וכן $y<x$ סותרים את המינימליות של x ו- y. לכן אין אברי S נתנים להשואה. על-סמך תנאי (ג) S סופית.

מ ש פ ט - ע ז ר ב.

תהי B קבוצה חלקית של M, S קבוצת האברים המינימליים ב- B ו- S_1 קבוצת האברים המינימליים ב- $B-S$. עבור כל אבר x השייך ל- S_1 קיים אבר y ב- S כך ש- $y \nless x$.

ה ו כ ח ה.

לולי היה הדבר כך, הרי עבור כל z השייך ל- B היה $z \nless x$, לכן היה x אבר מינימלי ב- B, כלומר x שייך ל- S. אולם S ו- S_1 הן קבוצות זרות.

לצורך הוכחת המשפט נכניס את מושג ה"וקטור" המגדר להלן.

ה ג ד ר ת ה " ו ק ט ו ר ".

הסדרה (a_i), $i=1,\dots,n$ תקרא " ו ק ט ו ר " אם $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. a_i יקרא ה מ ר כ י ב ה - i של ה"וקטור".

לצורך ההוכחה נקרא לקבוצה M בשם M_1.

הוכחת המשפט.

תהי M_1 הקבוצה הנתונה ונניח כי M_1 איננה סופית. תהי B_1 קבוצת כל האברים המינימליים ב- M_1. על-סמך תנאי (ב) B_1 איננה ריקה. מתוך משפט-עזר א נובע ש- B_1 סופית. נגדיר $M_2=M_1-B_1$. הואיל והנחנו כי M_1 איננה סופית ו- B_1 סופית, הרי M_2 אין-סופית ובפרט לא-ריקה. נסמן ב- B_2 את קבוצת האברים המינימליים ב- M_2, B_2 סופית ולא-ריקה. נגדיר M_3 על-ידי $M_3=M_2-B_2$. נמשיך באופן אינדוקטיבי את התהליך הזה ונקבל סדרה אין-סופית של קבוצות סופיות ולא-ריקות B_i. יהי n מספר טבעי כל שהוא ויהי b_n אבר של B_n. על-סמך משפט-עזר ב ישנו ב- B_{n-1} אבר b_{n-1} המקיים $b_{n-1} \prec b_n$. על-ידי חזרה על תהליך זה רואים שקיים "וקטור" $(b_1,...,b_n)$ אשר מרכיבו ה- i שייך לקבוצה B_i. נסמן ב-Σ_0 את קבוצת כל ה"וקטורים" בעלי צורה זו. ברור ש- Σ_0 היא קבוצה אין-סופית. המרכיב הראשון של כל אברי Σ_0 הוא אבר של B_1, שהיא קבוצה סופית. קיימת אפוא קבוצה חלקית אין-סופית Σ_1 אשר המרכיב הראשון של כל ה"וקטורים" שבה שוה, ואשר לכל אחד מאבריה לפחות שני מרכיבים. הואיל והמרכיב השני של כל "וקטורי" הקבוצה האין-סופית Σ_1 לקוח מתוך הקבוצה הסופית B_2, הרי נוכל להוציא מתוך Σ_1 קבוצה חלקית אין-סופית אשר כל המרכיבים השניים של "וקטוריה" שוים ולכל אבריה לפחות שלושה מרכיבים. בצורה זו נוכל להמשיך ולקבל סדרה אין-סופית של קבוצות "וקטורים" Σ_i בעלת התכונות: $\Sigma_{n+1} \subseteq \Sigma_n$; כל אחד מ- n המרכיבים הראשונים של "וקטורי" Σ_n שוה עבור כל ה"וקטורים" בקבוצה. נסמן ב- $b_n^{(n)}$ את המרכיב ה- n (המשותף) של אברי Σ_n. סדרה זו של B -ים ממלאת את היחסים

$$b_1^{(1)} \prec b_2^{(1)} \prec \dots \prec b_n^{(n)} \prec \dots$$

בניגוד לתנאי המכסימום. קבלנו אפוא סתירה, הנובעת מההנחה ש- M_1 איננה סופית.

§ 4. דוגמאות.

שלוש דוגמאות תראינה לנו את אי-תלותם של תנאי המשפט. נהפוך את קבוצת המספרים הטבעיים בשלושה אופנים לקבוצה סדורה באופן חלקי.

ד ו ג מ ה א.

x עוקב ל- y אם x גדול מ- y (במובן הרגיל). קבוצה סדורה זו מקימת את התנאים (ב) ו- (ג), אולם $1 \prec 2 \prec 3 \prec \dots$.

ד ו ג מ ה ב.

x עוקב ל- y אם x קטן מ- y. כאן מתקיימים תנאים (א) ו- (ג), אולם $1 \succ 2 \succ 3 \succ \dots$.

ד ו ג מ ה ג.

נניח שכל שני אברים אינם נתנים להשואה. (א) ו- (ב) מתקיימים, אך לא (ג).

האוניברסיטה העברית, ירושלים